第 1 招：等和线定理

【知识点】

1. 等和线定理：

（1）平面向量共线定理

已知 OA OB OC，若 1，则 A,B,C 三点共线；反之亦然 .

（2）等和线

平面内一组基底 OA,OB 及任一向量 OP,OP OA OB ， R ，若点 P 在直线 AB 上或在平行于 AB 的直线上，则 k (定值)，反之也成立，我们把直线 AB 以及与直线 AB 平行的直线成为等和线 .

①当等和线恰为直线 AB 时， k 1；

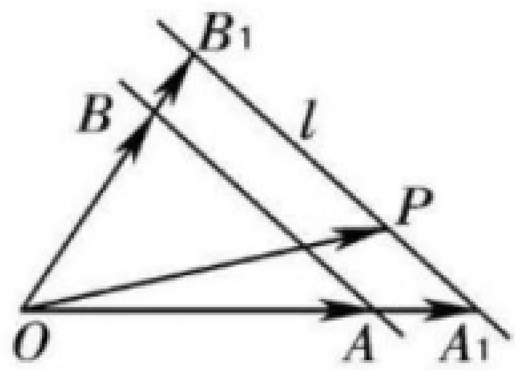
②当等和线在 O 点和直线 AB 之间时， k $0,1$ ；

③当直线 AB 在 O 点和等和线之间时， k $1,$ ；

④当等和线过 O 点时， k 0；

⑤若两等和线关于 O 点对称，则定值 k 互为相反数；

⑥定值 k 的变化与等和线到 O 点的距离成正比；



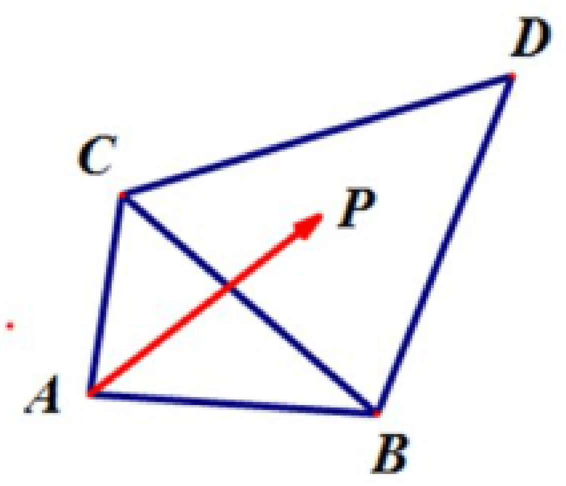
2. 等和线定理应用背景：

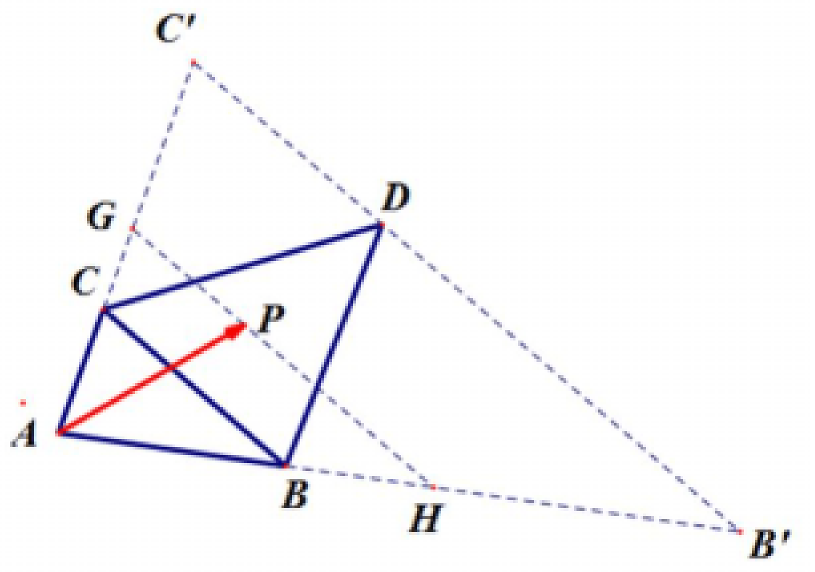
在平面向量基本定理的表达式中，若需研究两系数的和时，可以用等值线法 .

【典例剖析】

例 1. 如图， BCD 与 ABC 的面积之比为 2，点 P 是区域 $ABCD$ 内的任一点（含边界），且 $\overrightarrow{AP}$ $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$，则 的取值范围是 ( )

A. 0,1　　B. 0,2　　C. 0,3　　D. 0,4





解析：过点 P 作 GH//BC，交 AC, AB 的延长线于 G, H 则 $\overrightarrow{AP}$　x$\overrightarrow{AG}$　y$\overrightarrow{AH}$，

且 x　y　1，当点 P 位于 D 点时， G, H 分别位于 C', B'，

BCD 与 ABC 的 面 积 之 比 为 2 ， AC'　3AC, AB'　3AB ，

$\overrightarrow{OP}$　x$\overrightarrow{AG}$　y$\overrightarrow{AH}$　x$\overrightarrow{AC'}$　y$\overrightarrow{AB'}$　x 3 $\overrightarrow{AC}$　y 3 $\overrightarrow{AB}$　$\overrightarrow{AB}$　$\overrightarrow{AC}$

所以，　3y，　3x　　3x　3y　3

当点 P 位于 A点时，显然有：　0，所以，选 C

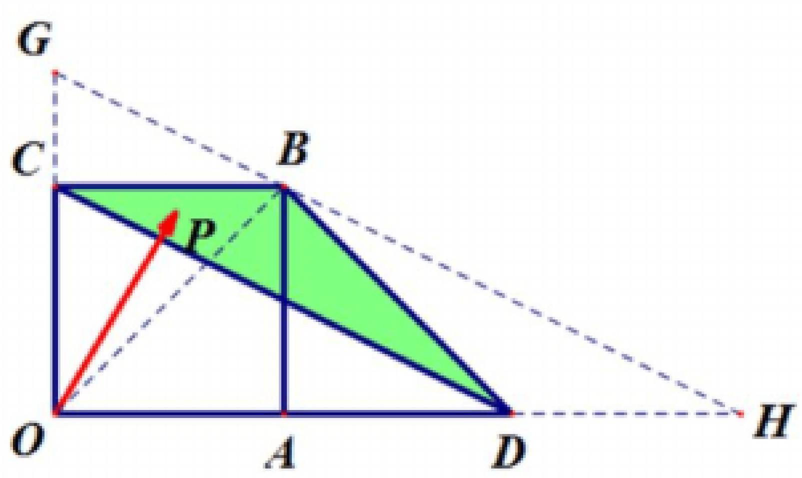
答案： C .

总结：通过等和线定理绘制出一系列等和线，找出其中的临界值，即为系数和的最值 .

【变式训练】

变式 1：如图，四边形 OABC 是边长为 1的正方形，点 D 在 OA的延长线上，且 AD　2，

点 P 是 BCD（含边界）的动点，设 $\overrightarrow{OP}$　$\overrightarrow{OC}$　$\overrightarrow{OB}$，则　　的最大值为 ________.



变式 2：设长方形 $ABCD$ 的边长分别是 $AD\quad 1, AB\quad 2$，点 P 是 BCD（含边界）的动点

设 $\overrightarrow{AP}\quad x\overrightarrow{AB}\quad y\overrightarrow{AD}$，则 $x\quad 2y$ 的取值范围为 (　　)

A. $1,2$　　B. $1,3$　　C. $2,3$　　D. $0,2$

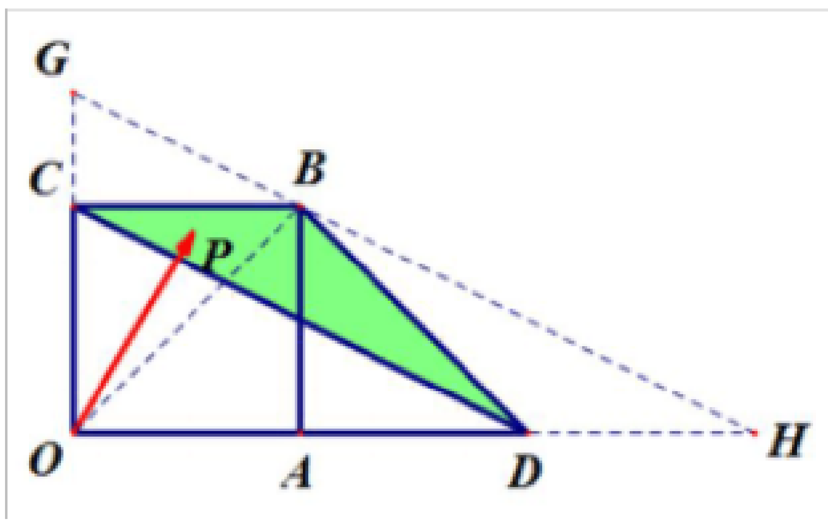
【真题链接】

（2017 高考全国Ⅲ理科第 12 题）在矩形 $ABCD$ 中，$AB\quad 1$，$AD\quad 2$，动点 P 在以 C 为圆心且与 BD 相切的圆上，若 $\overrightarrow{AP}\quad \overrightarrow{AB}\quad \overrightarrow{AD}$，则 的最大值为 (　　)

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

【答案】

变式 1：答案：$\dfrac{3}{2}$



解析：当点 P 位于 B 点时，过点 B 作 $GH\ //\ BC$，交 OC,OD 的延长线于 G,H

则 $\overrightarrow{OP}\quad x\overrightarrow{AG}\quad y\overrightarrow{AH}$，且 $x\quad y\quad 1$，

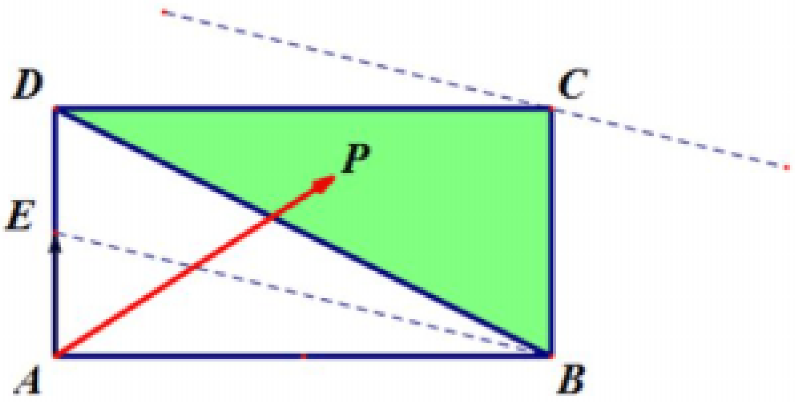
$\overrightarrow{OP}\quad \overrightarrow{OB}\quad x\overrightarrow{OG}\quad y\overrightarrow{OH}\quad \frac{3}{2}x\overrightarrow{OC}\quad \frac{3}{2}y\overrightarrow{OD}\quad\quad \overrightarrow{OC}\quad\quad \overrightarrow{OD}$

所以, $\quad \frac{3}{2}x,\quad \frac{3}{2}y \quad\quad\quad \frac{3}{2}x\quad \frac{3}{2}y\quad \frac{3}{2}$

故答案为 $\frac{3}{2}$

变式 2：

答案： B



解析： $\overrightarrow{AP}\quad x\overrightarrow{AB}\quad y\overrightarrow{AD}\quad x\overrightarrow{AB}\quad 2y\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\quad x\overrightarrow{AB}\quad 2y\overrightarrow{AE}$

如图，连 BE，当点 P 位于 B 点时，三点 B, E, P 共线，且 $\overrightarrow{AP}\quad \overrightarrow{AB}$，即 $x\quad 2y\quad 1\quad 0\quad 1$，

当点 P 位于 C 点时， $\overrightarrow{AP}\quad \overrightarrow{AC}\quad \overrightarrow{AB}\quad 2\overrightarrow{AE}\quad x\overrightarrow{AB}\quad 2y\overrightarrow{AE}$，即 $x\quad 2y\quad 1\quad 2\quad 3$ 故

选 B

高考真题链接：

答案： A